（ｖ）中高一貫SSHの完成に向け中学に重点を置いたカリキュラム・教材の開発

ａ．数学科

１．仮説

本校卒業生に実施したアンケート調査の分析から、大学で学ぶ数学をスムーズに理解するには，高校までにある程度，「統計」と「微分方程式」の学習が必要であるという結果を得た。実際「微分方程式」は理科系のみならず経済などの分野でも活用されており、また「統計」も社会の様々な分野で利用されていて、統計が記載されていない新聞を見ることはない。そこで、「統計」では「集団に潜む特徴をつかむ」，「微分方程式」では「関数の微小な変化をとらえる」という教材開発方針のもと，指導に関連する項目を策定し，教材開発と授業実践を行い，本校の実態に即した中高一貫のカリキュラムへの配置を検討することとした。

また、生徒の数学への興味関心を高め、数学的能力を育成するには、優れた教材を適切に配置し指導することが重要であると考え、「統計」と「微分方程式」以外の内容についても，大学の学びにつながるような数学教材の開発と実証的な考察を行っていくことにした。

２．研究の概要

「統計」と「微分方程式」の指導における項目として策定したものは，以下の通りである。

S：集団に潜む特徴をつかむ

S1－1　資料の整理　　S1－2　集団を特徴づける値

S1－3　確率分布と推測の考え方

S1－4　相関係数と回帰直線

S2－1　推定・検定　　S2－2　主成分分析

D：関数の微小な変化をとらえる

D1－1　関数の微小な変化　D2－1　基本的な微分方程式

D2－2　微分方程式の応用

（注：S1 と D1 は生徒全員に学ばせたい内容，S2 と D2 は発展的な内容と考えている）

これらに関する教材及び大学での学びにつながる数学の内容という視点での教材を開発し、カリキュラムの完成を目指している。

本年度までに開発した教材は以下の通りであり、このうち☆印★印が本年度開発した教材である。

注：表左端のアルファベットの記号は次の略であり、中学は小文字，高校は大文字、数字は実施学年である。

「A.代数(Algebra)」　「An. 解析(Analysis)」

「G. 幾何(Geometry)」　「P. 確率(Probability)」

「D. 微分方程式(Differential Equation)」

「S. 統計(Statistics)」　「O. その他(Others)」

(例)　an1.　2 元 1 次方程式とその応用、中学 1 年の「解析」

　　　S3.　主成分分析入門、高校 3 年の「統計」

a1－1.	整数　☆（昨年度から継続）
a1－2.	有理数　☆（昨年度から継続）
A1	数と方程式　★
A3－1.	置換と正多面体群
A3－2.	１次変換の線形性☆
an1.	2 元 1 次方程式とその応用
An1.	2 次関数
An2.	円周率の近似
g1	四角形の合同条件　☆
g2.	チェバ・メネラウスの定理
g3-1.	立方体の切断
g3-2.	反転法
G1	四面体の幾何　☆
G2.	正１７角形の作図　★
Pf－1.	組合せの確率モデル
Pf－2.	EBI と確率・統計
Pf－3.	無限集合の確率　☆
s1.	統計の基本
s2.	近似直線
s3.	正規分布と標準化
S1.	回帰直線，相関係数
S2.	残差分析によるデータ系列の関係
S3－1.	主成分分析入門
S3－2.	正規分布の平均の推定　★
d1.	自然数の和，平方数の和，立方数の和
d2.	グラフや図形の移動・変形
d3.	錘体の体積，球の体積・表面積，放物線と面積
D1.	包絡線
D2.	グラフ描画の方法ーテクノロジーへの挑戦ー
D3－1	微分方程式の応用
D３-2	関数のグラフの描画法　☆
D３-3.	曲線と面積　★
Of.	4 元数を高校数学へ
O2.	有限世界の数学

以下、紙面の都合により、★印の教材のみを記載する。

A1-1. 数と方程式

関連分野：代数 高等数学：解析幾何，複素関数論 対象学年：高校１年生 関連単元：数と式，方程式 教 材 名：複素数，３次方程式

≪数の拡張と方程式の解≫

方程式の解を求めて数は拡張されてきたともいえる。3 次方程式を解くために数を複素数に拡張し，方程式の解を求めることに関しては複素数で完結することを知らせる。(『代数学の基本定理』複素数の範囲で n 次方程式は n 個の解を持つ)

また複素数の演算に関連して，複素数平面でのその性質を確認すると共に，特に積の回転拡大を活用できるようにする。

３次方程式を解くことを目標に，複素数など必要なものを学習していく。ここで示したい教材は，<u>複素数の積の回転拡大と 3 次方程式の解法</u>であるが，扱う教材の流れといくつかの問題をあわせて記述する。

A1-1.1. 複素数

(1) 実数

有理数（有限小数&循環小数)，無理数（循環しない無限小数)，平方根の計算などを通常通り扱う。
（詳細は省略）

(2) 実数から複素数へ

$ax^2+bx+c=0$ （a,b,c は定数で,$a\neq 0$）の解は,

判別式 $D=b^2-4ac \geqq 0$ のとき,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$D<0$ のとき，実数解はない。

次に,3 次方程式の実数解について考えよう。

例えば,$x^3-3x+1=0$ $\cdots$①について,

①の左辺を $f(x)$ とすると，$f(-10)<0,\ f(10)>0$ であり， $y=f(x)$ のグラフは連続なので，①は実数解を少なくとも１つ持つ。

ここで,

$$x^3+a^3+b^3-3abx$$
$$=(x+a+b)(x^2+a^2+b^2-ax-bx-ab)$$

であることから，$a^3+b^3=1,\ \ ab=1\cdots$②となる a,b を考えると，①は,

$$(x+a+b)\left\{x^2-(a+b)x+a^2-ab+b^2\right\}=0$$

と因数分解でき，実数解 $x=-(a+b)$ を得る。

従って，②を満たす a,b を求めればよい。

②より， $a^3+b^3=1,\ \ a^3b^3=1\cdots$③

a^3,b^3 を解に持つ方程式は,

$$(y-a^3)(y-b^3)=0$$
$$y^2-(a^3+b^3)y+a^3b^3=0$$

すなわち， $y^2-y+1=0$ $\cdots$④

④は，判別式 $D=-3<0$ より，実数解を持たない。
しかし，3 次方程式①は実数解を持つ！

そこで，④のような 2 次方程式も解を持つように，数の範囲を拡張する。

【虚数単位 i 】

$x^2=-1$ を満たす数を１つ考え，それを i で表し，虚数単位という。従って，$i^2=-1$ である。

【虚数単位 i を含む数の演算】

虚数単位 i は数であり，i を含む数の計算は通常どおり行えるものとする。

例１.

$3i-i=2i$

$2i\times 2i=4i^2=-4$

$(1+i)+(3+i)=4+2i$

$(1+i)(3+i)=3+4i+i^2=2+4i$

$$\frac{1+i}{3+i}=\frac{(1+i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{3+2i-i^2}{9-i^2}=\frac{4+2i}{10}=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i$$

i と実数の加減乗除で出来る数は，全て，$a+bi$（a,b は実数）の形で表すことができる。

【複素数】

$a+bi$（a,b は実数）の形で表される数を複素数といい，a をこの複素数の実部，b を虚部という。
また，複素数 $a+bi$ で，$b=0$ のときは実数であるが，$b \neq 0$ のとき虚数という。
また特に，$a=0, b\neq 0$ のとき，純虚数　という。

【共役な複素数】

複素数 $z=a+bi$ に対して，$a-bi$ を，z と共役な複素数といい，$\overline{z}$ で表す。

例2．共役な複素数の和,積は実数である。

$z+\overline{z}=a+bi+a-bi=2a$

$z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2$

問1．$z=p+qi$，$w=r+si$（p,q,r,s は実数）とする。

(1) 次の式が成り立つことを示せ。

$\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$，$\overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w}$

(2) $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$（a,b,c,d は実数）とする。複素数 α について，$f(\alpha)=0$　ならば $f(\overline{\alpha})=0$　であることを示せ。

（証明略）

$i^2=-1$，$(-i)^2=i^2=-1$　であり，$x^2=-1$ の解は，$x=\pm i$　である。
一般に，$x^2=-a$（ただし，$a>0$）の解は，$x=\pm\sqrt{a}\,i$　である。

【負の数の平方根】

$a>0$ のとき，$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$　とする。
特に，$\sqrt{-1}=i$　である。

例3．

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$（a,b,c は実数，$a\neq 0$）において，判別式 $D=b^2-4ac<0$ のときの解は，

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{-b^2+4ac}\,i}{2a}$$

問2．次の2次方程式を解け。

(1) $x^2=i$　　(2) $x^2=-1+\sqrt{3}\,i$

(3) $x^2+(-1+3i)x-8+i=0$

解）

(1) $x=a+bi$（a,b は実数）とすると，与式より，

$(a+bi)^2=i$，$a^2-b^2+2abi=i$

a,b は実数だから，$a^2-b^2=0, 2ab=1$

2式より，$a=b=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　よって，$x=\pm\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$

(2) (1) と同様に，$x=a+bi$（a,b は実数）とすると，与式より，$a^2-b^2+2abi=-1+\sqrt{3}\,i$

a,b は実数だから，$a^2-b^2=-1,\ 2ab=\sqrt{3}$

2式より b を消去して，

$a^2-\dfrac{3}{4a^2}=-1,\ a^4+4a^2-3=0$

$(2a^2-1)(2a^2+3)=0$

$a^2\geqq 0$ であるから，$a^2=\dfrac{1}{2}$

よって，$a=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, b=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$（複号同順）

従って，$x=\pm\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}\,i}{2}$

(3) $t^2=p+qi$（p,q は実数）の解の1つを $\sqrt{p+qi}$ で表すことにして，2次方程式の解の公式を利用する。
与式より，

$b^2-4ac=(-1+3i)^2-4(-8+i)=24-10i$　であるから，$x=\dfrac{(1-3i)\pm\sqrt{24-10i}}{2}$

ここで，$(a+bi)^2=24-10i$ とすると，

$a^2-b^2=24,\ 2ab=-10$

2式より b を消去して，

$a^2-\dfrac{25}{a^2}=24,\ a^4-24a^2-25=0$

$(a^2-25)(a^2+1)=0$

$a^2\geqq 0$ であるから，$a^2=25$，$a=\pm 5$

よって，$a+bi=\pm(5-i)$

従って，$x=\dfrac{(1-3i)\pm(5-i)}{2}=3-2i,-2-i$

係数が虚数の2次方程式も，複素数の範囲で，2つの解を持つ。

⑶ 複素数平面

次のものは，それぞれ，１対１に対応し，同一視することができる。

①複素数$z=a+bi$ （a,b は実数）

②座標平面上の点Ｐ (a,b)

③座標平面で，原点Ｏから点Ｐ(a,b)までの矢印$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

【複素数平面】

座標平面で，点Ｐ (a,b) に複素数$z=a+bi$ を対応させたものを，複素数平面といい，そのx軸とy軸を，それぞれ，実軸と虚軸ともいう。

またＰ (a,b)を，Ｐ $(a+bi)$，Ｐ (z)，点zなどと表すことがある。

例４．複素数平面で，共役な複素数z，$\overline{z}$ が表す点は，実軸について対称である。

問３．α,β を複素数，p を実数する。次の値又は点を表す複素数を，$\alpha,\overline{\alpha},\beta,\overline{\beta},p$ の式で表せ。

⑴ α の実部及び虚部

⑵ α と直線$x=p$ について対称な点

⑶ α と直線$y=p$ について対称な点

⑷ 線分$\alpha\beta$ の中点

⑸ $\triangle O\alpha\beta$ の重心

解）

⑴ 実部 $\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}$，虚部 $\dfrac{\alpha-\overline{\alpha}}{2i}$

⑵ $-\overline{\alpha}+2p$　　⑶ $\overline{\alpha}+2pi$

⑷ $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$　　⑸ $\dfrac{\alpha+\beta}{3}$

【複素数の絶対値】

複素数$z=a+bi$（a,bは実数）に対応する点を$\mathrm{P}(z)$とするとき，点Ｐと原点Ｏとの距離を，z の絶対値といい，$|z|$とかく。

$|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$ 　である。

また，$z\cdot\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$ であるから，

$|z|^2=z\cdot\overline{z}$ 　である。

問４．$z=p+qi$，$w=r+si$ （p,q,r,s は実数）とするとき，$|zw|=|z|\cdot|w|$ 　であることを示せ。

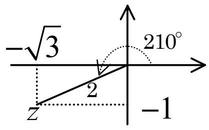
（証明略）

【複素数の偏角】

複素数$z=a+bi$（a,bは実数）に対応する点を$\mathrm{P}(z)$とするとき，実軸の正の部分と線分OPの作る角を，z の偏角といい，$\arg(z)$ とかく。

ただし角は，実軸の正の部分を基準に，反時計回りの向きを正として表すものとする。

例５．$z=-\sqrt{3}-i$ 　のとき，



$|z|=2$

$\arg(z)=210^\circ$

注：偏角について，回転の向きや１回転以上の角を考えると，表し方は１通りではない。すなわち，

$\arg(z)=210^\circ,570^\circ,\cdots,-150^\circ,-510^\circ\cdots$

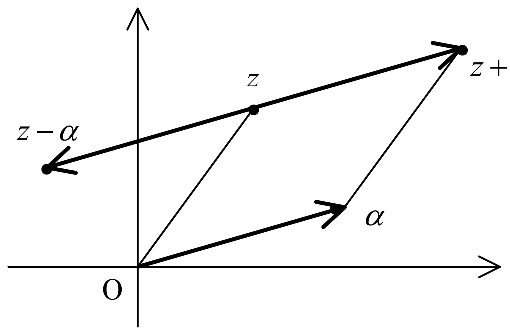
一般に，$\arg(z)=210^\circ+360^\circ\times n$（$n$ は整数）

である。

【和の性質】

複素数α に対応する点をα とする。

α を加えると，複素数平面上で，矢印$\overrightarrow{\mathrm{O}\alpha}$ だけ平行移動し，α を引くと矢印$\overrightarrow{\alpha\mathrm{O}}$ だけ平行移動する。



問５．$z=2+2i$，$w=-1+3i$ とする。

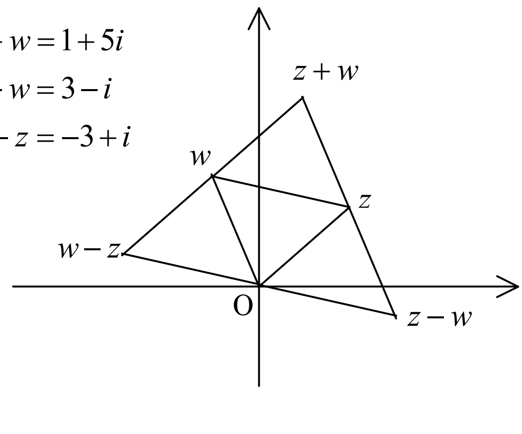
３点O，z，wを頂点とする平行四辺形の，残りの頂点を表す複素数を求めよ。

解）

$z+w=1+5i$

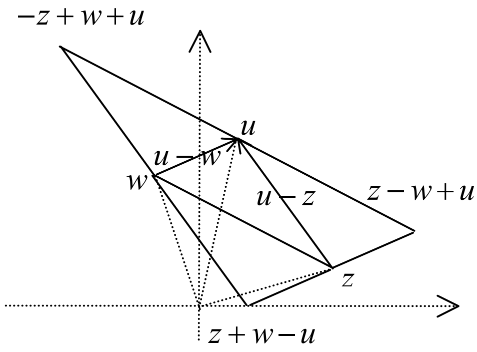
$z-w=3-i$

$w-z=-3+i$



問6． $z=3+i$， $w=-1+3i$， $u=1+4i$ とする。
3点 z， w， u を頂点とする平行四辺形の，
残りの頂点を表す複素数を求めよ

解）



$-z+w+u=-3+6i$

$z-w+u=5+2i$

$z+w-u=1$

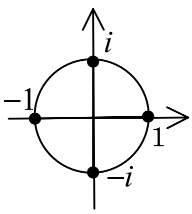
【積の性質Ⅰ】
虚数単位 i をかけると，複素数平面上で，原点を中心に90°回転する。
（証明略）

例6．

$i^2=-1$

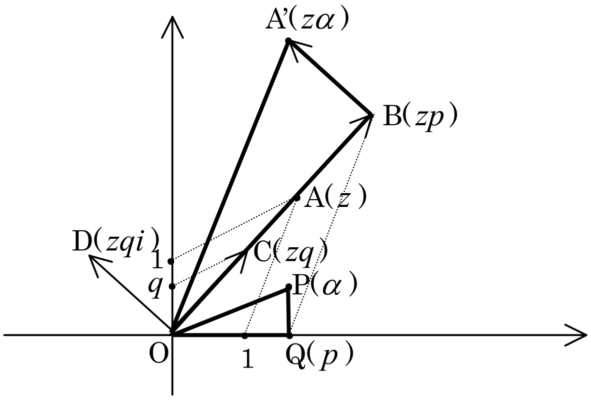
$i^3=-i$

$i^4=1$



【積の性質Ⅱ】
複素数 α をかけると，複素数平面上で，原点を中心に，$|\alpha|$ 倍に拡大し， $\arg(\alpha)$ だけ回転する。
（証明）
$\alpha=p+qi$ （p,q は実数）とし，複素数平面上で，原点をO，また，P(α),Q(p),A(z),A'($z\alpha$)とする。

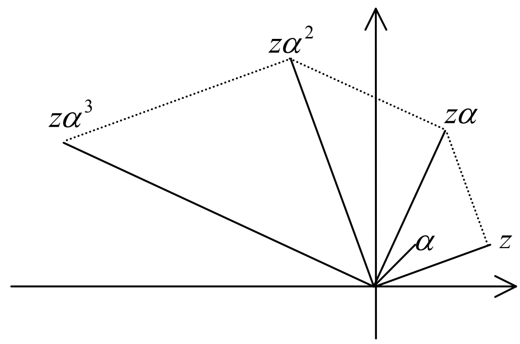
$1<p, 0<q<1$ の場合の図



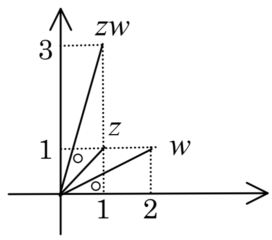
$z\alpha=zp+zqi\cdots$①であり，B(zp),C(zq)とすると，B,Cは直線OA上にある。
また D(zqi)とすると，積の性質Ⅰより，ODは，OCを原点を中心に90°回転したものであり，
①より，BA'=OD=OC, BA'⊥OB
従って，△OPQ∽△OA'B より，∠QOP=∠BOA'
また，|OA'|=$|z\alpha|=|z||\alpha|$=OA×$|\alpha|$
よって示された。

例7． $z=3+i, \alpha=1+i$ 　のとき，

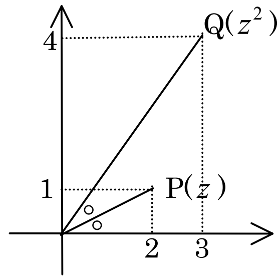
$$z\alpha=2+4i, z\alpha^2=-2+6i, z\alpha^3=-8+4i$$



例8．
$z=1+i$
$w=2+i$
のとき，
$zw=1+3i$ より，
右図の角は等しい。



例9．
$z=2+i$
のとき，
$z^2=3+4i$ より，
右図の角は等しく，
$\mathrm{OP}^2=\mathrm{OQ}$



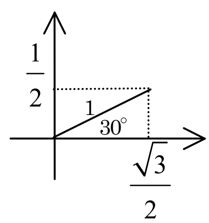
例10．
点$(4,2)$を，
原点を中心に
30°回転した点は，

$$(4+2i)\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$$

$$=(-1+2\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})i$$

より，

$$\left(-1+2\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\right)$$

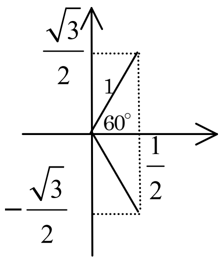


問7．座標平面上で，原点O，点$A(4,2)$とする。

　　$\triangle OAB$が正三角形となるような点Bを求めよ。

解）

$A(4,2)$を，
原点を中心に
$\pm 60^\circ$ 回転した点は，



$$(4+2i)\times\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$=(2\mp\sqrt{3})+(1\pm 2\sqrt{3})i$$

より，

$B\left(2\mp\sqrt{3}, 1\pm 2\sqrt{3}\right)$　（複号同順）

問8．座標平面上に点$A(4,2)$，$B(2,6)$及びCがある。

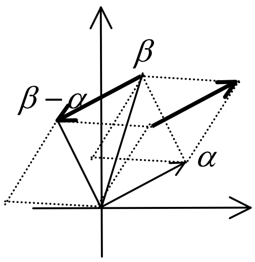
　　$\triangle ABC$が正三角形のとき，Cの座標を求めよ。

解）

$A(\alpha)$，$B(\beta)$とすると，

$\alpha = 4+2i$

$\beta = 2+6i$



Cを表す複素数は，

$$(\beta-\alpha)\times\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\alpha$$

$$(-2+4i)\times\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+4+2i$$

$$=(3\mp 2\sqrt{3})+(4\pm\sqrt{3})i$$

よって

$C\left(3\mp 2\sqrt{3},\ 4\pm\sqrt{3}\right)$　（複号同順）

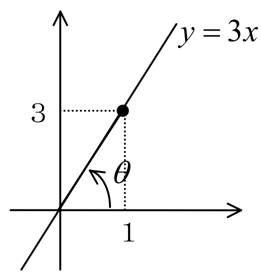
問9．点$P(4,1)$と，直線$y=3x$について対称な点Qの

　　座標を求めよ

解）

$y=3x$上の点$(1,3)$について，

$|1+3i|=\sqrt{10}$　であるから，



$y=3x$とx軸の正の部分との

作る角をθとすると，

$\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}(3+i)$　をかけると原点を中心にθ回転し，

$\overline{\alpha}$ をかけると$-\theta$回転する。

$y=3x$を原点を中心に$-\theta$回転すると実軸に重なり，共役な複素数は実軸について対称であるから，

$p=4+i$，$Q(q)$とすると，

$$q=\overline{\overline{p}\cdot\overline{\overline{\alpha}}\cdot\alpha}$$

$$=\overline{p}\cdot\alpha^2$$

$$=(4-i)\cdot\left\{\frac{1}{\sqrt{10}}(1+3i)\right\}^2$$

$$=(4-i)\cdot\frac{1}{10}(-8+6i)$$

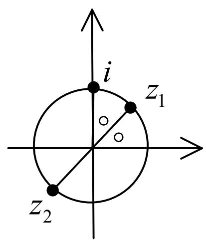
$$=\frac{1}{5}(-13+16i)$$

よって，$Q(-\frac{13}{5},\frac{16}{5})$

例11.

　$z^2=i$を満たすzは，

右図のz_1, z_2で，



$$z_1=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$$

$$z_2=-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

問10．次の方程式を解け。

(1) $z^2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$　(2) $z^3=-i$ (3) $z^2=1+\sqrt{3}i$

(4) $z^4=-2+2\sqrt{3}i$ (5) $z^2=2+\sqrt{5}i$

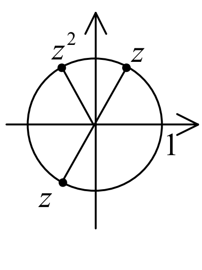
解）

(1) $|z^2|=|z|^2=1$より

　$|z|=1$

　$\arg(z^2)=120^\circ$ より

　$\arg(z)=60^\circ, 240^\circ$



　よって，$z=\pm\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$

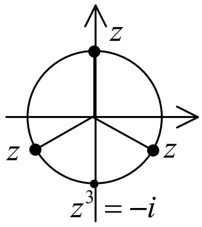
(2) $|z^3|=|z|^3=1$ より

$|z|=1$

$\arg(z^3)=270^\circ$ より

$\arg(z)=90^\circ, 210^\circ, 330^\circ$

よって，$z=i, \dfrac{\pm\sqrt{3}-i}{2}$



(3) $|z^2|=|z|^2=2$ より

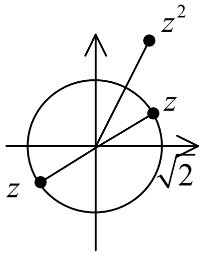
$|z|=\sqrt{2}$

$\arg(z^2)=60^\circ$ より

$\arg(z)=30^\circ, 210^\circ$

よって，

$$z=\sqrt{2}\times\left(\pm\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)=\pm\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}\,i}{2}$$



(4) $|z^4|=|z|^4=4$ より $|z|=\sqrt{2}$

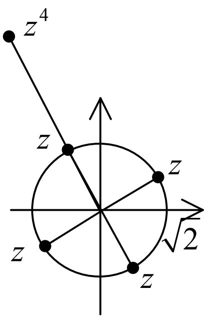
$\arg(z^4)=120^\circ$ より

$\arg(z)=30^\circ, 120^\circ, 210^\circ, 300^\circ$

よって，

$$z=\sqrt{2}\times\left(\pm\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right),$$

$$\sqrt{2}\times\left(\pm\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)=\pm\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}\,i}{2},\pm\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}\,i}{2}$$



(5) $|z^2|=|z|^2=3$ より $|z|=\sqrt{3}$

また角の２等分線の性質より

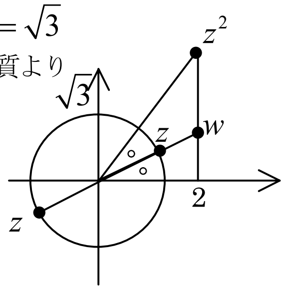
図の w について，

$$w=2+\frac{2\sqrt{5}}{5}i$$

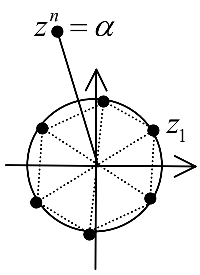
$$=\frac{2}{\sqrt{5}}\left(\sqrt{5}+i\right)$$

よって，

$$z=\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\left(\sqrt{5}+i\right)=\pm\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}\,i}{2}$$



注：$z^n=\alpha$ …①の１つの解を z_1 とするとき，①の n 個の解は，複素数平面上で，原点を中心とする半径 $|z_1|$ の円に内接し，点 z_1 を１つの頂点に持つ正 n 角形の，頂点である。



A1-1.2.　方程式

(1) 因数定理と高次方程式

因数定理・剰余定理を通常通り扱い，高次方程式を因数分解によって解く。(詳細は省略)

(2) 方程式の諸性質

次のことを確認する。(詳細は省略)

① 実数係数の２次方程式の解の判別

② $f(x)$ が n 次の整式であるとき，n 次方程式 $f(x)=0$ は，複素数の範囲で，n 個の解を持つ。

また，$f(x)$ の係数がすべて実数の時，

$$f(\alpha)=0 \text{ ならば } f(\overline{\alpha})=0$$

同様に，$f(x)$ の係数がすべて有理数の時，

$$f(p+q\sqrt{2})=0 \text{ ならば } f(p-q\sqrt{2})=0$$

(ただし p,q は有理数)

③ 解と係数の関係

２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解が α,β

$$\Leftrightarrow (x-\alpha)(x-\beta)=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$$

$$\Leftrightarrow \alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

$ax^3+bx^2+cx+d=0$ の解が α,β,γ

$$\Leftrightarrow (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

$$=x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}$$

$\Leftrightarrow$

$$\alpha+\beta+\lambda=-\frac{b}{a}, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}, \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ の解が $\alpha,\beta,\gamma,\delta$

$$\Leftrightarrow (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$$

$$=x^4+\frac{b}{a}x^3+\frac{c}{a}x^2+\frac{d}{a}x+\frac{e}{a}$$

$$\Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma+\delta=-\frac{b}{a},$$

$$\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=\frac{c}{a},$$

$$\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=-\frac{d}{a},$$

$$\alpha\beta\gamma\delta=\frac{e}{a}$$

(3) ３次方程式

【３乗根】

実数aに対して，$x^3 = a \quad \cdots *$ 　を満たす実数xを $\sqrt[3]{a}$ で表し『３乗根a』という。

注：$f(x) = x^3$ が単調に増加する関数であることから，

　＊を満たす実数がただ１つ存在する。

例１．$x^3 = 2$ を満たす実数xは，

$$x = \sqrt[3]{2} = 1.259921\cdots$$

また，$\left(-\sqrt[3]{2}\right)^3 = -\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = -2$ であるから，

$x^3 = -2$ を満たす実数xは，

$$x = \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$$

（参考）n乗根の定義

一般に，実数aと自然数nに対して，

nが奇数の時，

$x^n = a$ を満たす実数xが $\sqrt[n]{a}$

$a > 0$，nが偶数の時，

$x^n = a$ を満たす正の実数xが $\sqrt[n]{a}$

なお，$a = 0$ のとき，$\sqrt[n]{0} = 0$

【３次方程式$t^3 - 3abt + a^3 + b^3 = 0 \cdots$☆

（a,bは定数）の解】

☆より，

$$(t+a+b)\left\{t^2-(a+b)t+a^2-ab+b^2\right\}=0$$

$t = -(a+b)$

または　$t^2-(a+b)t+a^2-ab+b^2=0 \cdots$①

①の判別式をDとすると，

$$D=(a+b)^2-4(a^2-ab+b^2)=-3(a-b)^2$$

$$=\left\{(a-b)\sqrt{3}\,i\right\}^2$$

したがって，☆の解は，

$$t=-(a+b),\quad \frac{a+b\pm(a-b)\sqrt{3}\,i}{2}\cdots★$$

問１．次の３次方程式を解け。

（なお，(1),(2)とも有理数解を持たない。）

(1) $x^3-9x^2+18x-12=0$

(2) $x^3+6x^2+6x-6=0$

解）(1) $x=t+3$ とおくと，与方程式は，

$$(t+3)^3-9(t+3)^2+18(t+3)-12=0$$

これより，$t^3-9t-12=0 \quad \cdots$①

ここで，$a^3+b^3=-12,\ ab=3\cdots$②

となるa,bを考えると，①は☆となり，

解は★で表される。

②より，$a^3+b^3=-12,\ a^3b^3=27\cdots$③

a^3,b^3は，$y^2+12y+27=0$ の解である。

この解は$y=-9,-3$ より，$a^3=-9,b^3=-3$ は③を満たし，$a=-\sqrt[3]{9},\ b=-\sqrt[3]{3}$ 　は，②を満たす。

従って，★及び$x=t+3$ より，与方程式の解は，

$$x=\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+3,$$

$$\frac{-\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}\pm(-\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3})\sqrt{3}\,i}{2}+3$$

注：②を満たす複素数a,bは，$a=-\sqrt[3]{9},\ b=-\sqrt[3]{3}$ 以外にもあるが，このa,bに対して与３次方程式の３解が求められているので，他のa,bについて★を用いて解を求めても，同じものが求まる。

(2) $x=t-2$ とおくと，与方程式は，

$$(t-2)^3+6(t-2)^2+6(t-2)-6=0$$

これより，$t^3-6t-2=0 \quad \cdots$④

ここで，$a^3+b^3=-2,\ ab=2\cdots$⑤

となるa,bを考えると，④の解は★で表される。

⑤より，$a^3+b^3=-2,\ a^3b^3=8\cdots$⑥

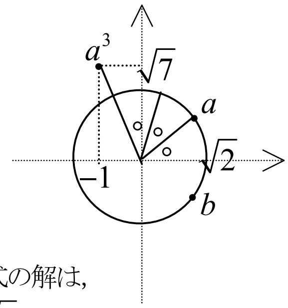
a^3,b^3は，$y^2+2y+8=0$ の解である。

よって$y=-1\pm\sqrt{7}\,i$ であり，

$a^3=-1+\sqrt{7}\,i,\ b^3=-1-\sqrt{7}\,i$ は⑥を満たす。

$|a^3|=|b^3|=2\sqrt{2}$ より，

$|a|=|b|=\sqrt{2}$



複素数平面で，

右図のようにa,bを定め，

$a=p+qi$ （p,qは実数）

とすると，$b=p-qi$

であり，これらは⑤を満たす。

★及び$x=t-2$ より，与方程式の解は，

$$x=-2p-2,\quad \frac{2p\pm2qi\sqrt{3}\,i}{2}-2$$

$$=-2p-2,\quad p\mp q\sqrt{3}-2$$

注：a,bは虚数であったが，３解とも実数である。

（2008 鈴木清夫）

G2. 正 17 角形の作図

関連分野：幾何，代数
高等数学：複素平面，
対象学年：高校１，２年
関連単元：二次方程式，図形と方程式
教材名：正 17 角形の作図

<<生徒の興味関心を高めるための数学史の話題>>

1．はじめに

『近世数学史談』（高木貞治著）によると，当時 19 才のガウス（Carl Friedlich Gauß 1777－1855）が 1796 年 3 月 30 日の朝，目覚めて起きようとした時に正 17 角形を忽然と思いついたのであるという。この発見がガウスに数学者を志させた。つぎは，ガウスが日記にとどめた内容である。

「正多角形の中で三角形，五角形，15 角形および辺数をつぎつぎに２倍して生ずるものの作図が可能であることは幾何学の初歩を学んだものはだれでも知っていることで，そこまではユークリッドの時代にできていたのであるが，その後は初等幾何ではそれ以上に得られないことと信ぜられていたように見える。少なくとも予はこの方面においてさらに一歩をすすめる試みに成功したことを聞かないものである。

この故に，いま上記の正多角形の外になお多くのもの，例えば，正 17 角形などの作図が可能であることの発見は注意に値するものと考える次第である。この発見は，一層広汎なるある理論の系題に過ぎないのであるが，その理論はなお少し未完成なところがあるから完成の上で速やかに発表するであろう。C.F.Gauß」

2．正 17 角形の作図の種

さて，正 17 角形を作図するためには何が分かればよいのだろうか？

そもそも，正多角形の作図問題は，定規とコンパスあるいはそれら有限回の組み合わせにより表出する図形の性質を考察する際に現れる図形の性質の延長として指導することがほとんどであろう。それ故に，正 3 角形，正 6 角形，正 5 角形などの多角形の作図方法を知っているかどうかで終始してしまうことはとても残念である。これは作図を解析的に扱うことがないためであり，仕方がないことである。

高校生になれば n が大きくなる場合の正 n 角形の作図に関しては，作図方法よりも正多角形の作図の根本問題は何であるのかということに目がいくだろう。さらに，正多角形の作図をこれまでの学習と関連させて考えようとするだろう。その結果，正多角形の中心角に目がいき，正 17 角形ならば，中心角 $\dfrac{360°}{17}$ に目が向いていくのが自然な流れとなる。

すなわち，単位円において，定規とコンパスを有限回組合せることにより，$\dfrac{360°}{17}$ がとれれば作図が可能である。すなわち，$\cos\dfrac{360°}{17}$ が作図できれば，始線から最初の 17 等分点が単位円上に作図することができて解決する。

そこで，本課題は，$\cos\dfrac{360°}{17}$ を定規とコンパスで作図することが目標となる。言い換えるならば，$\cos\dfrac{360°}{17}$ が三乗根とか，五乗根とかを用いずに高々平方根だけを用いて表せる数だということを示せばよい。なお，定規とコンパスによる作図の可能性については次に述べる。

3．定規とコンパスによる作図の上限について

定規とコンパスによる作図を xy 平面上で考える。すなわち，

コンパス → 円：$x^2+y^2+Ax+By+C=0$

定規 → 直線：$ax+by+c=0$

であり，コンパスと定規を用いて図形の交点を作図していく訳だから，それぞれを連立した方程式を考えればよい。

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ px+qy+r=0 \end{cases} \qquad \text{(A)}$$

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ x^2+y^2+Ax+By+C=0 \end{cases} \qquad \text{(B)}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+Ax+By+C=0 \\ x^2+y^2+Px+Qy+R=0 \end{cases} \qquad \text{(C)}$$

(A)，(B)，(C)いずれの場合も，一方の未知数を消去した結果は，高々２次方程式だから，結果は，高々四則演算と平方根を用いて表される数であることがわかる。

以上から，定規とコンパスによる作図の上限は，四則演算と平方根を用いた数であることがわかる。

> 問題：次の問いに答えよ。
> (1)　$\cos 72^\circ$ の値を求めよ。
> (2)　正５角形が定規とコンパスを用いて作図できることを示せ。

(1)は，教科書では発展問題として３倍角の公式

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

のための計算問題として取り上げられることが多い。本問は，図形的な意味にまで言及することによって，正５角形の作図につながることを指摘しておきたい[1]。

４．複素数平面上の点と極形式

複素数平面上において，極形式で考えるために若干の準備と確認を行う。

＜定理＞

> 単位円に内接する正 17 角形の頂点は
> $$z^{17}=1$$
> の解で表されている。

[証明]　　$z=\cos\theta + i\sin\theta$

とおくと，

$$z^{17} = (\cos\theta + i\sin\theta)^{17}$$

$$= \cos 17\theta + i\sin 17\theta$$

となり，これが $z^{17}=1$ に一致するため，偏角を比べ

$$2\pi k = 17\theta \quad (k\in Z) \text{ となる。}$$

したがって，

$$z^k = \left(\cos\frac{2\pi}{17} + i\sin\frac{2\pi}{17}\right)^k$$

$$= \cos\frac{2\pi}{17}k + i\sin\frac{2\pi}{17}k$$

となり，これは確かに正17 角形の頂点と一致する。■

次に，

$$z^{17}=1$$

より

$$(z-1)(z^{16}+z^{15}+z^{14}+\cdots\cdots+z+1)=0$$

$z\neq 1$ より，

$$z^{16}+z^{15}+z^{14}+\cdots\cdots+z+1=0 \qquad ①$$

であることに注意する。

５．正 17 角形の作図

正 17 角形の作図をするために，$\cos\dfrac{360^\circ}{17}$ が高々平方根だけを用いて表せることを示す。

＜目標＞

> $2\pi = 17\varphi$ とおいて，
> $\cos\varphi = \cos\dfrac{2\pi}{17}$ を高々平方根だけを用いて表せることを示す。

①から，z の実数部分に着目すると，

$$\cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \cdots\cdots + \cos 16\varphi = -1$$

また，

$$\cos n\varphi = \cos(17-n)\varphi$$

に注意[2]すると，

$$2(\cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \cdots\cdots + \cos 8\varphi) = -1$$

よって，

---

1 ただし，$\sin 72^\circ$ を求めさせることは無理がある。なぜならば，計算の過程でルートがどこまでも追いかけてくるから。(c.f.チェビシェフの多項式)

2 幾何的には, 複素数平面上で，２点 z^1 と z^{16}，２点 z^2 と z^{15}，･･･，２点 z^8 と z^9 はそれぞれ x 軸に関して対称である。

$$\cos\varphi+\cos 2\varphi+\cos 3\varphi+\cdots\cdots+\cos 8\varphi=-\frac{1}{2}$$

さらに，

$$\cos\varphi+\cos 4\varphi=a$$
$$\cos 2\varphi+\cos 8\varphi=b$$
$$\cos 3\varphi+\cos 5\varphi=c$$
$$\cos 6\varphi+\cos 7\varphi=d$$

とおく[3]。さらに，

$$a+b=e,\quad c+d=f$$

とおくと，

$$\begin{aligned}e+f&=(a+b)+(c+d)\\&=\cos\varphi+\cos 2\varphi+\cos 3\varphi+\cdots\cdots+\cos 8\varphi\\&=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

すなわち，

$$e+f=-\frac{1}{2} \qquad ②$$

また，積和の公式

$$2\cos x\cos y=\cos(x+y)+\cos(x-y)$$

に注意して，次の式を計算する。

$$\begin{aligned}2ab&=2(\cos\varphi+\cos 4\varphi)(\cos 2\varphi+\cos 8\varphi)\\&=2\cos\varphi\cos 2\varphi+2\cos\varphi\cos 8\varphi+\\&\qquad 2\cos 4\varphi\cos 2\varphi+2\cos 4\varphi\cos 8\varphi\\&=\cos(\varphi+2\varphi)+\cos(\varphi-2\varphi)+\\&\qquad\cos(\varphi+8\varphi)+\cos(\varphi-8\varphi)+\\&\qquad\cos(4\varphi+2\varphi)+\cos(4\varphi-2\varphi)+\\&\qquad\cos(4\varphi+8\varphi)+\cos(4\varphi-8\varphi)\\&=\cos 3\varphi+\cos\varphi+\cos 9\varphi+\cos 7\varphi+\\&\qquad\cos 6\varphi+\cos 2\varphi+\cos 12\varphi+\cos 4\varphi\\&=\cos\varphi+\cos 2\varphi+\cos 3\varphi+\cdots\cdots+\cos 8\varphi\\&=e+f=-\frac{1}{2} \qquad ③\end{aligned}$$

同様に$2ac, 2ad, 2bc, 2bd, 2cd$ を計算すると

$$2ac=2a+b+d$$
$$2ad=b+c+2d$$
$$2bc=a+2c+d$$
$$2bd=a+2b+c$$

よって，

$$\begin{aligned}2ac+2ad+2bc+2bd&=4(a+b+c+d)\\&=4(e+f)=-2\end{aligned}$$

また，左辺を因数分解すると，

$$2(a+b)(c+d)=-2$$
$$(a+b)(c+d)=-1$$

すなわち，

$$ef=-1 \qquad ④$$

②，④より２次方程式

$$t^2+\frac{1}{2}t-1=0$$

を解くと，$e>f$ であるから

$$e=\frac{-1+\sqrt{17}}{4},\quad f=\frac{-1-\sqrt{17}}{4}$$

よって，a，b について，③に注意して

$$a+b=e$$
$$ab=-\frac{1}{4}$$

であるから，２次方程式

$$t^2-et-\frac{1}{4}=0$$

を解くと，$a>b$ から，

$$a=\frac{1}{2}e+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^2}=-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\sqrt{17}+\frac{1}{8}\sqrt{34-2\sqrt{17}}$$

$$b=\frac{1}{2}e-\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^2}=-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\sqrt{17}-\frac{1}{8}\sqrt{34-2\sqrt{17}}$$

同様にして，

$$c=-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\sqrt{17}+\frac{1}{8}\sqrt{34+2\sqrt{17}}$$

$$d=-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\sqrt{17}-\frac{1}{8}\sqrt{34+2\sqrt{17}}$$

さらに，

$\cos\varphi$ と$\cos 4\varphi$ に関して，

$$2\cos\varphi\cos 4\varphi=\cos 5\varphi+\cos 3\varphi=c$$

---

[3] 各cos について，このおき方がこの中心となる解法である。すなわち，φ の４倍で組み合わせるとφ から8φ の全てを表すことができるc，d は

$\cos 3\varphi+\cos 12\varphi=\cos 3\varphi+\cos 5\varphi$，

$\cos 6\varphi+\cos 24\varphi=\cos 6\varphi+\cos 7\varphi$ である。しかし，3倍，5倍，6倍，7倍等ではうまくいかない。

であるから，

$$\cos\varphi\cos 4\varphi = \frac{1}{2}c$$

$$\cos\varphi + \cos 4\varphi = a$$

だから，２次方程式

$$t^2 - at + \frac{1}{2}c = 0$$

の解が，$\cos\varphi$ と $\cos 4\varphi$ になる。

よって，$\cos\varphi > \cos 4\varphi$ であるから

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}c}$$

$$\cos 4\varphi = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}c}$$

ここで，根号の中の計算を簡単にするために，

$$a^2 = (\cos\varphi + \cos 4\varphi)^2$$

$$= \cos^2\varphi + 2\cos\varphi\cos 4\varphi + \cos^2 4\varphi$$

よって，

$$2a^2 = 2(\cos^2\varphi + 2\cos\varphi\cos 4\varphi + \cos^2 4\varphi)$$

$$= 2\cos^2\varphi + 2 \cdot 2\cos\varphi\cos 4\varphi + 2\cos^2 4\varphi$$

$$= \cos 2\varphi + \cos 0 + 2c + \cos 8\varphi + \cos 0$$

$$= b + 2c + 2$$

すなわち，

$$2a^2 = b + 2c + 2$$

であるから，

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{8}b - \frac{1}{4}c}$$

$$= -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} +$$

$$\frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}$$ [4]

以上より，$\cos\varphi$ の値は，高々平方根で表すことができるから，定規とコンパスを用いて正17 角形を作図することができる。 ■

[4] 近似値は，0.932472229･･･である。

６．まとめにかえて

正100 角形までの作図可能な正多角形は，正三角形，正方形，正五角形，正六角形，正八角形，正十角形，正十二角形，正十五角形，正十六角形，正十七角形，正二十角形，正二十四角形，正三十角形，正三十二角形，正三十四角形，正四十角形，正四十八角形，正五十一角形，正六十角形，正六十四角形，正六十八角形，正八十角形，正八十五角形である。とくに，n が素数のとき，正 n 角形の作図可能性については，n がフェルマー素数に限られる。ここで取り上げた17 角形は，まさにそのフェルマー素数[5]の一つであり，作図可能なものは，正３角形，正５角形，正 17 角形，正 257 角形，正 65537 角形の５種類である。

これらをフェルマー素数で分類すると次のようになる。

$P = 2^{2^m} + 1$ の形をした素数（m は正の整数)である。

$m = 0$ のとき，$P = 3$ より正三角形が作図できる。
よって，正 3，6，12，24，48，96 角形が作図できる。
$m = 1$ のとき，$P = 5$ より正五角形が作図できる。
よって，正 5，10，20，40，80 角形が作図できる。

【参考文献】

・『近世数学史談』（高木貞治著　共立出版）
・『高校から大学への接続』(飯高 茂著　論理力と数学力を向上させるための数学教育の研究（数学教育の会　数学教育研究第10 号))

[5] 1665 年，フェルマーによって，$2^{2^m} + 1$ の形をした素数（m は正の整数）である。現在，$m = 0, 1, 2, 3, 4$ の５種類が分かっている。$m = 5$ の場合，

$$2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4294967297 = 641 \times 6700417$$

となり，素数ではないことが，1732 年にオイラーにより示された。

（2008 牧下英世）

S. 3-2 正規分布の平均の推定

関連分野：統計分野
高等数学：統計
対象学年：高校３年生
関連単元：「統計処理」(数学 C)
教 材 名：「正規分布の区間推定」

≪大学での学びへつながる高校での学び≫

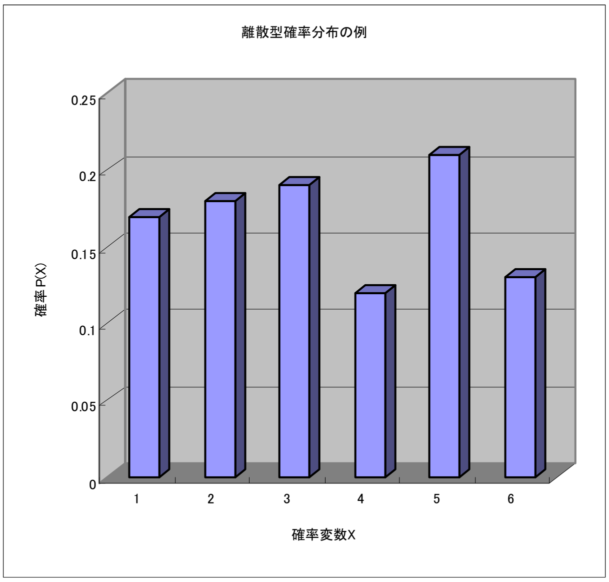
数理統計学で学習する正規分布の平均の推定について、高校３年生を対象とした教材として，Microsoft Excel を用いて正規分布の数表やグラフを作成することで，正規分布による統計処理の重要性，性質について学び，最後に信頼区間の構築についても数値実験を交えた学習をすることを提案する。数理統計の基本的な概念（正規分布等の基礎知識）についてはある程度既習であることを仮定し，ここではあえて区間推定に注目して教材を作成した。

S. 3-2. 1 連続型の確率分布に従う確率変数

確率分布とは，ある確率変数に対して，起こりうる確率をグラフ化したものであり，離散型の確率分布と連続型の確率分布がある。

離散型の確率分布とは，例えば，サイコロを振ったときに出る目を X としたときに，その確率 $P(X)$ をグラフ化したものが離散型の確率分布と言える。

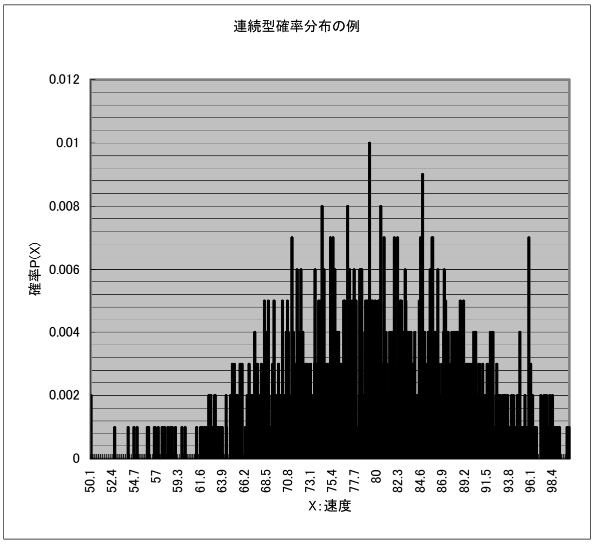
<u>離散型の分布の例</u>
確率変数 X ：サイコロの出る目
確率 $P(X)$ ：100 回の試行での確率



また，連続型の確率分布に従う確率変数の例として挙げられるのは，次のようなものが考えられる。つまり，確率変数の取りうる値が，サイコロの目のようにとびとびの値ではなく，すべての実数値を考えるようなときに連続型の確率分布に従うという。

例１） ある道路で走っている車の速度を確率変数 X とすると，確率変数 X は連続型の分布に従う。
例２） ある学校における生徒の身長のデータを確率変数 X，体重のデータを確率変数 Y とすると，確率変数 X， Y は連続型の分布に従う。

<u>連続型の分布の例</u>
確率変数 X ：ある道路で走っている車の速度
確率 $P(X)$ ：1000 個のデータでの確率



次に，連続型の分布で最も使用頻度の高い，正規分布の性質について紹介する。

S. 3-2. 2 正規分布 (Normal Distribution) の性質

正規分布は，連続型の分布の中でも，対称性など非常に扱いやすい性質を多く持っている。また，特に中心極限定理から，どのような分布に従うような確率変数だとしても，データの数を大きくすると，その標本平均は正規分布に従うことがわかっていることから，正規分布の解析は非常に重要である。そこで，大学での学びに繋がる教材として，正規分布の様々な重要である性質を基本的な概念から紹介する。

2-1 正規分布の確率密度関数(Probability Density Function)

平均μ、分散σ^2の正規分布に従う確率変数Xの確率密度関数$f(X)$は

$$f(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\ \sigma^2}}e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

（$e=2.718\cdots$：ネイピアの数）　である。

特に，このような正規分布に従う確率変数Xを

$$X \sim N(\mu,\sigma^2)$$

と書く。

2-2 正規分布の確率分布関数(Probability Distribution Function)

平均μ、分散σ^2の正規分布に従う確率変数Xの確率分布関数$F(X)$は

$$F(X)=\int_{-\infty}^{X} f(t)dt$$ と表される。

ただし，$f(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\ \sigma^2}}e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

これらのことを，身近なソフトである，Microsoft Excel の組み込み関数を用いて，実際に分布に触れてみる。

使う組み込み関数は,

NORMDIST( )：正規分布の分布関数の値を返す関数

NORMSINV( )：正規分布関数の逆関数の値を返す

RAND( )：0 から 1 までの一様乱数を発生させる

～正規分布の分布関数と密度関数を作ってみよう～

手順①まず Excel シートの一番左から２番目の列に，-2.7~2.7 までの数字を 0.1 刻みでドラッグする。

手順②一番左に NORMDIST( )という関数をすべての行にドラッグし，手順①の数を代入する。

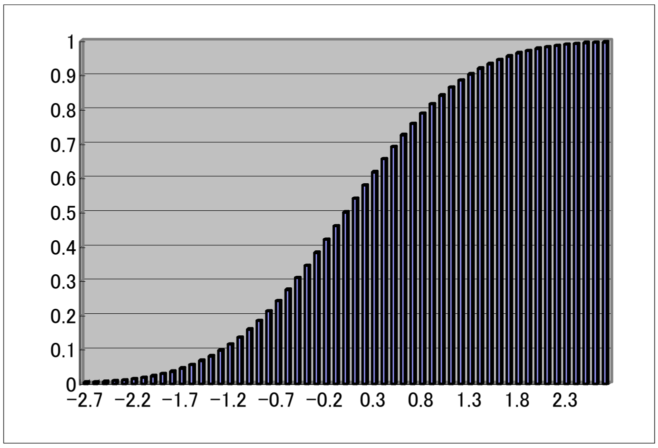
手順③左から３番目の列に一番左の列の２項分の差をすべての行にドラッグする。

手順④一番左の列をヒストグラムのグラフにすると，分布関数，一番右の列のヒストグラムが確率密度関数となる。

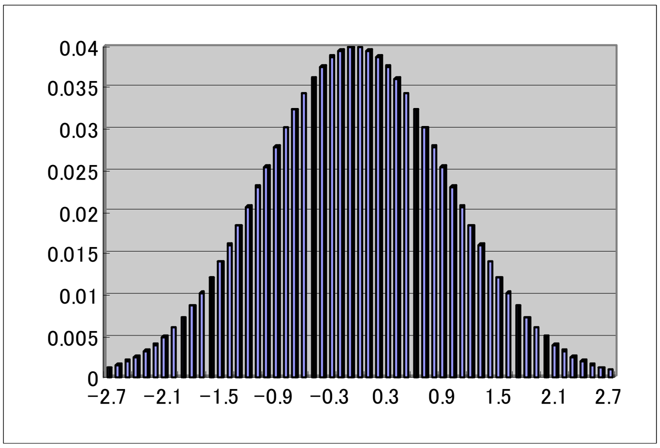
NORMSDIST()	確率変数Ｘ	確率密度
0.003467023	−2.7	0.001194199
0.004661222	−2.6	0.001548458
0.00620968	−2.5	0.001987849
0.008197529	−2.4	0.002526552
0.010724081	−2.3	0.003179318
0.013903399	−2.2	0.003960959
0.017864357	−2.1	0.004885705
0.022750062	−2	0.005966431
0.028716493	−1.9	0.007213773
0.035930266	−1.8	0.008635166
0.044565432	−1.7	0.010233858
0.054799289	−1.6	0.012007939
0.066807229	−1.5	0.013949482
0.080756711	−1.4	0.016043838
0.096800549	−1.3	0.018269182
0.115069732	−1.2	0.02059637
0.135666102	−1.1	0.022989158
0.15865526	−1	0.025404832
0.184060092	−0.9	0.027795242
0.211855334	−0.8	0.030108245
0.241963578	−0.7	0.032289486
0.274253065	−0.6	0.034284468
0.308537533	−0.5	0.036040771
0.344578303	−0.4	0.037510339
0.382088643	−0.3	0.03865167
0.420740313	−0.2	0.039431792
0.460172104	−0.1	0.039827895
0.5	0	0.039827896
0.539827896	0.1	0.039431792
0.579259687	0.2	0.03865167
0.617911357	0.3	0.037510339
0.655421697	0.4	0.036040771
0.691462467	0.5	0.034284468
0.725746935	0.6	0.032289486
0.758036422	0.7	0.030108245
0.788144666	0.8	0.027795242
0.815939908	0.9	0.025404832
0.84134474	1	0.022989158
0.864333898	1.1	0.02059637
0.884930268	1.2	0.018269182
0.903199451	1.3	0.016043838
0.919243289	1.4	0.013949482
0.933192771	1.5	0.012007939
0.945200711	1.6	0.010233858
0.955434568	1.7	0.008635166
0.964069734	1.8	0.007213773
0.971283507	1.9	0.005966431
0.977249938	2	0.004885705
0.982135643	2.1	0.003960959
0.986096601	2.2	0.003179318
0.989275919	2.3	0.002526552
0.991802471	2.4	0.001987849
0.99379032	2.5	0.001548458
0.995338778	2.6	0.001194199
0.996532977	2.7	0.000911832
0.997444809	2.8	

注）ここでは，0.1 刻みのヒストグラムにしたが，これを0.01，0.001 刻みのヒストグラムにすることで，離散型の分布と連続型分布の考え方の違いがより明確になる。そして，この作業を通して，分布関数と確率密度関数の関係が，微積分の関係があることだけではなく，確率の意味で分布をとらえることができる。実際に自分で数値を実験的に解析してみることで，分布論の本質を見ることができる教材として使えるだろう。

一番左の列のヒストグラム
（確率分布関数のイメージ）



一番右の列のヒストグラム
（確率密度関数のイメージ）



このヒストグラムでわかるとおり，密度関数の一つ一つの棒はすべて確率を表現している。つまり，この分布からわかることは，横軸に並べられた数値がとられる確率が，その分布によって制御されるということである。
そこで，正規分布に従う数値を扱う題材として，数値実験の基本となる，正規分布の数表を作成する。

～標準正規分布の数表を作ってみよう～

手順①　一番左の列に0.01から1.00まで0.01刻みで数値を入れる。

手順②　2 列目に NORMSINV(　)という関数を入れる。

確率	パーセント点	確率	パーセント点
	NORMSINV()		NORMSINV()
0.01	−2.33	0.51	0.03
0.02	−2.05	0.52	0.05
0.03	−1.88	0.53	0.08
0.04	−1.75	0.54	0.10
0.05	−1.64	0.55	0.13
0.06	−1.55	0.56	0.15
0.07	−1.48	0.57	0.18
0.08	−1.41	0.58	0.20
0.09	−1.34	0.59	0.23
0.10	−1.28	0.60	0.25
0.11	−1.23	0.61	0.28
0.12	−1.17	0.62	0.31
0.13	−1.13	0.63	0.33
0.14	−1.08	0.64	0.36
0.15	−1.04	0.65	0.39
0.16	−0.99	0.66	0.41
0.17	−0.95	0.67	0.44
0.18	−0.92	0.68	0.47
0.19	−0.88	0.69	0.50
0.20	−0.84	0.70	0.52
0.21	−0.81	0.71	0.55
0.22	−0.77	0.72	0.58
0.23	−0.74	0.73	0.61
0.24	−0.71	0.74	0.64
0.25	−0.67	0.75	0.67
0.26	−0.64	0.76	0.71
0.27	−0.61	0.77	0.74
0.28	−0.58	0.78	0.77
0.29	−0.55	0.79	0.81
0.30	−0.52	0.80	0.84
0.31	−0.50	0.81	0.88
0.32	−0.47	0.82	0.92
0.33	−0.44	0.83	0.95
0.34	−0.41	0.84	0.99
0.35	−0.39	0.85	1.04
0.36	−0.36	0.86	1.08
0.37	−0.33	0.87	1.13
0.38	−0.31	0.88	1.17
0.39	−0.28	0.89	1.23
0.40	−0.25	0.90	1.28
0.41	−0.23	0.91	1.34
0.42	−0.20	0.92	1.41
0.43	−0.18	0.93	1.48
0.44	−0.15	0.94	1.55
0.45	−0.13	0.95	1.64
0.46	−0.10	0.96	1.75
0.47	−0.08	0.97	1.88
0.48	−0.05	0.98	2.05
0.49	−0.03	0.99	2.33
0.50	0.00	1.00	

(注)ここでは便宜上0.01 刻みで数表を作成したが，数値実験を行う上では 0.001 刻みで数表を作成したほうが良いことは言うまでもない。

また，数値実験などに使う，正規乱数の発生もMicrosoft Excel で実際に簡単にできるので教材として紹介する。

~Excel で正規乱数を発生させる~

NORMINV(RAND(), μ, σ)と入れると，簡単に正規乱数を発生することが可能である。ここで，μは正規分布の平均，σは標準偏差である。

-1.01287	-0.7195	1.198403
1.79929	0.193525	-1.10126
0.809171	1.435187	0.758695
0.191316	-0.51435	-0.17416
0.644748	-0.83152	-0.96971
-0.77739	2.027964	0.643789
0.64574	0.88836	-1.23184
-0.31891	-1.11545	0.479009
-1.29551	-1.54826	0.032413
-0.07608	-0.71517	-0.2539
1.304934	-0.58478	0.453766

(発生させた正規乱数<平均０，分散１>の例)

また，ここでの話は，Excel の分析ツールというアドインを用いても簡単に同様のことが可能ではあるが，そのような専門的なソフトを用いることなく，手軽に解析ができるというのが，ポイントである。

ここで，どのような確率変数についても成立する，中心極限定理という重要な定理について触れておく。

2-3 中心極限定理(Central Limit Theorem)

平均(mean)μ、分散(Variance)σ^2である同一の分布に独立に従う,n個の確率変数, $X_1, X_2, \cdots X_n$について,

$\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$の分布は, $n \to \infty$のとき,

平均μ，分散$\dfrac{\sigma^2}{n}$の正規分布で近似される。

この定理があるからこそ，様々な統計処理において正規分布を用いることが重要であるといえる。わかりやすく言えば，標本数を極端に大きくすれば，その分布は正規分布に従うことがわかる，ということである。標本数がある程度多くあれば，正規分布での推定論，検定論で議論を進めることができる。

S.3-2.3 正規分布の標準化と標本分布

次に，正規分布の平均，分散についてのいくつかの重要な性質と，確率変数の変換についての性質をまとめておく。

3-1 平行移動

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$のとき,

$$X - \mu \sim N(0, \sigma^2)$$

となる。

3-2 拡大(Expand)・縮小(Shrink)

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$のとき,

$$aX \sim N(a\mu, a^2\sigma^2)$$

となる。

(証明)

確率変数を定数倍しても正規分布に従うことは明らかであるので，変数変換したあとの平均，分散について計算して示す。

平均について,

$E(aX) = aE(X) = a\mu$

分散について,

$Var(aX) = \left(E(aX)\right)^2 - E\left((aX)^2\right)$

$= \left(aE(X)\right)^2 - a^2E(X^2)$

$= a^2\left(\left(E(X)\right) - E(X^2)\right)$

$= a^2 Var(X)$

$= a^2\sigma^2$

よって，$aX \sim N(a\mu, a^2\sigma^2)$

3-3 正規分布の再生性(Reproduce Property)

確率変数X，Yがそれぞれ独立であり,

$X \sim N(\mu_1, {\sigma_1}^2), Y \sim N(\mu_2, {\sigma_2}^2)$のとき,

$X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, {\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2)$

が成立する。

証明)

確率変数$X + Y$が正規分布に従うことは密度関数の変数変換から明らかである。

平均について,

$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = \mu_1 + \mu_{2_2}$

確率変数X，Yがそれぞれ独立なので，共分散は,

$$Cov(X,Y)=E(X)E(Y)-E(XY)=0$$

分散について,

$$Var(X+Y)=\left(E(X+Y)\right)^2-E\left((X+Y)^2\right)$$
$$=\left(E(X)+E(Y)\right)^2-E(X^2+2XY+Y^2)$$
$$=\left(\left(E(X)\right)^2+\left(E(Y)\right)^2+2E(X)E(Y)\right)$$
$$-E(X^2)-2E(XY)-E(Y^2)$$
$$=Var(X)+Var(Y)+Cov(XY)$$
$$=\sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2$$

以上のことから,平均の推定論でもっとも重要となる,正規分布の標準化と，標本平均の分布が考えられる。

3-4 正規分布の標準化

$X\sim N(\mu,\sigma^2)$ のとき

$$\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$$

となる。

3-5 標本平均の分布

ある正規母集団から，とられた n 個の確率変数，$X_1,X_2,\cdots X_n$ がすべて独立に同一の(Identically Independent Distribute) 正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ に従っているとするとき，標本平均(Sample mean),

$$\overline{X}=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$$ の分布は,

$$\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$$

となる。

S. 3-2. 4 分散が既知の場合での区間推定

問）ある正規母集団からとられた n 個の確率変数，$X_1,X_2,\cdots X_n$ がすべて独立に同一の正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ に従っているとする。分散を既知とするとき，μ に関する信頼水準９５％の信頼区間(Confidence Interval)を構築せよ。

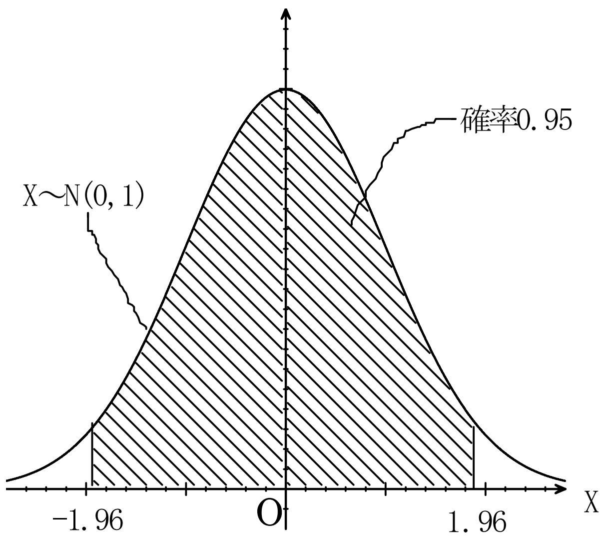
(解)3-5 より標本平均,

$$\overline{X}=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$$ の分布は,

$$\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$$

となる。

ここで，$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}}\sim N(0,1)$ より，下図の確率から,



$$P\left(-1.96\le\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}}\le 1.96\right)=0.95$$

$$\Leftrightarrow P\left(\overline{X}-1.96\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\le\mu\le\overline{X}+1.96\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right)=0.95$$

となるので,

$$\overline{X}-1.96\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\le\mu\le\overline{X}+1.96\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

が求める９５％信頼区間となる。

例）実際に正規乱数（平均１分散 4）を発生させて，Excel を用いて，数値実験を行ってみる。データの数を１００，１０００，１００００と数を増やして信頼区間を構築する。使う正規乱数は上記の組み込み関数，NORMINV(RAND(),1,2)＜平均１,分散２の正規乱数を発生させる関数＞を使う数値を簡単に作り出せるので，生徒も非常に簡単に数値解析に触れることができた。

Table 1 データ数　１００

2.413282			
-0.65428			
0.800204	標本平均		97.5%点
4.495934	1.105933		1.959961
2.048252			
4.913956			
・	下限	信頼区間	上限
・	0.713941	＜μ＜	1.497925
・			
4.632549			
2.51214			

Table 2 データ数　１０００

0.829911			
3.61708			
2.892804	標本平均		97.5%点
-0.17975	0.895189		1.959961
3.50322			
1.047332			
0.639729	下限	信頼区間	上限
2.258159	0.77123	＜μ＜	1.019147
・			
・			
・			
4.449895			
-1.65699			

Table 2 データ数　１００００

1.433456			
-0.33401			
3.315219	標本平均		97.5%点
-0.66667	1.003615		1.959961
-0.17811			
1.448824			
1.690829	下限	信頼区間	上限
1.590346	0.964416	＜μ＜	1.042814
・			
・			
・			
2.900598			
-3.38566			

この数値実験の結果からわかることが，
「データ数ｎが大きければ多いほど，その信頼区間の幅が狭くなっていく」
ということである。この現象は，分散が既知のときでももちろん起こる話で,このような数値実験(シミュレーション)をすることでより明確になっている。この信頼区間の話でもっとも重要なのは，以下２つの問題点にある。

- 分散が既知のときでのみ，この信頼推定が可能である。逆に言うと，分散が未知のときは，標本分散を使った分散の推定が必要である。そして，それには，χ^2分布，ｔ分布，Ｆ分布の導入が必要となる。
- 区間幅が固定でないため，データ数が少ないときには，明らかに区間幅が広くなってしまう。極端な話をすると,「信頼水準９５％で推定しているのにもかかわらず，その確率を満たす区間幅が-10～10 となっては推定の意味がない(区間幅が広すぎては推定の議論として意味がない)」ということになる。

従って，この先の議論は，まずは分散が未知のときの推定はどのように行うのか，ということ，そして，区間幅を固定して考えなければならない場合，どのような推定理論が必要なのかを考える必要がある。

分散が未知のときの推定は，上述の通り非正規の分布を導入して，そのパーセント点を用いて区間推定を行う。

区間幅が固定の場合，サンプル数をどのように設定すれば良いか,という議論になり,それは逐次推定論，逐次検定論に帰着することになる。また,「分散が未知，かつ区間幅を固定」という条件においては，標本数の設定で,未知パラメータの推定を段階的に行うことで，信頼区間の構築をしていくという議論が必要となる。

しかし，推定理論においては，まずは正規分布の信頼区間の構築ができれば，すべて同じような議論が，他の分布に従うような確率変数についても同様の議論ができるだけでなく，点推定や，検定の議論に持ち込むことは非常に容易であることは間違いない。

(2008　三井田裕樹)

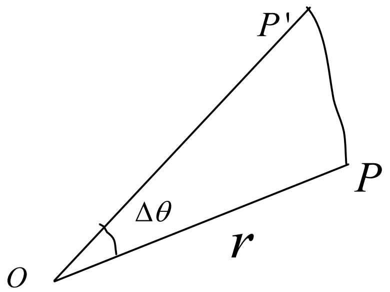
D3-3　曲線と面積

> 関連分野：解析分野，幾何分野
> 高等数学：複素関数論
> 対象学年：高校３年生
> 関連単元：微分積分（数学Ⅲ）
> 教材名：「面積」

D3-3.1.　媒介変数表示の関数と面積

平面上、点Ｐの動きと線分 OP の通過領域の面積を考える。

$\angle P'OP = \Delta\theta$ （極めて微小な角）のとき、図の図形 $P'OP$ の面積 ΔS を三角形と見なして考えるには２通りある。



（その１）三角形の公式から

$$\Delta S = \Delta OPP' = \frac{1}{2} r \cdot (r + \Delta r)\sin\Delta\theta$$

ここで、$\Delta\theta \to 0$ のとき、$\Delta r \to 0$，$\sin\Delta\theta = \Delta\theta$ と考え、$\Delta S = \Delta OPP' = \frac{1}{2} r \cdot (r + \Delta r)\sin\Delta\theta$

$$\Delta S = \Delta OPP' = \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta$$

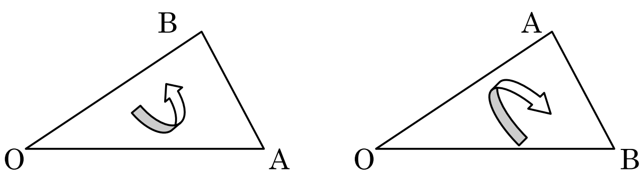
よって、$\angle POx = \alpha$ から $\angle POx = \beta$ のとき、

$S = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r^2 d\theta$　で求められる。

しかし、$\angle POx = \theta$　でない場合は、使用不可であることに注意。

（その２）平行四辺形の半分

そのため符号付き面積の準備をしておく。



O を原点、２点 A(a,b),B(c,d)をとり、$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ が１次独立のとき、

符号付き△OAB の面積Ｓ＝$\frac{1}{2}(ad - bc)$

単に面積の場合は、$S = \frac{1}{2}\left|ad - bc\right|$ とする。

証明）OA,OB の長さを r_1, r_2 とし、A,B の偏角をそれぞれ θ_1, θ_2 とする。ただし、$-\pi < \theta_1 - \theta_2 < \pi$，$\theta_1 \neq \theta_2$ とする。

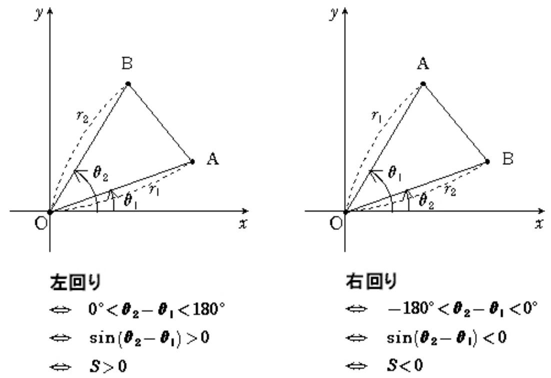
$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|\sin(\theta_1 - \theta_2) = \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

これより、$\theta_1 < \theta_2$ のとき、S>0　，

$\theta_1 > \theta_2$ のとき、S<0 である。

$$S = \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)$$
$$= \frac{1}{2} r_1 r_2 (\sin\theta_1 \cos\theta_2 - \cos\theta_1 \sin\theta_2)$$
$$= \frac{1}{2}(r_1 \sin\theta_1 \cdot r_2 \cos\theta_2 - r_1 \cos\theta_1 \cdot r_2 \sin\theta_2)$$
$$= \frac{1}{2}(ad - bc) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

■



（その３）１次独立な２つのベクトル

その２における $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ に対応するベクトルとして、曲線上の点をＰとしたとき、$\overrightarrow{OP}$ とＰでの接線ベクトル $\overrightarrow{v_P}$ （点Ｐでの速度ベクトル）を考える。

$$dS = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & \frac{dx}{d\theta} \\ y & \frac{dy}{d\theta} \end{vmatrix} d\theta = \frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{d\theta} - y\frac{dx}{d\theta}\right)d\theta$$

これによって、媒介変数 θ で表される動点 P(x,y)が描く曲線 C（$\alpha \leqq \theta \leqq \beta$）と線分 OA（$\theta = \alpha$），OB（$\theta = \beta$）で囲まれた図形の面積 S を求めるためのすぐれた次の公式 (Gauss-Green の定理) が得られる。

$A(x(\alpha), y(\alpha))$，$B(x(\beta), y(\beta))$ これらが、原点から見て左回りのとき、

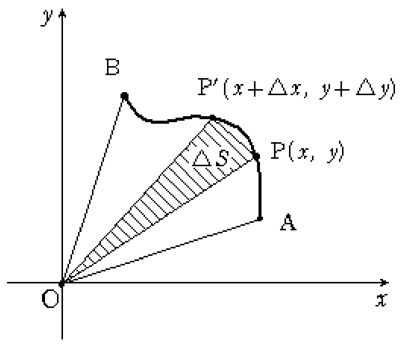
$$S=\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\{x(\theta)y'(\theta)-x'(\theta)y(\theta)\}d\theta$$

逆の右回りの場合は、この値は負となる。

（速度ベクトルを用いない証明）

AB 間の任意の点 P(x,y)から微小な変化した点を P'(x＋Δx,y＋Δy)とする。

すると、OP，OP'で増加した面積ΔS は、

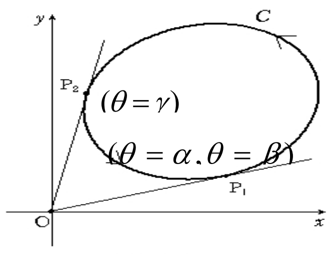


$$\Delta S=\frac{1}{2}\{x(y+\Delta y)-(x+\Delta x)y\}=\frac{1}{2}(x\cdot\Delta y-\Delta x\cdot y)$$

よって、$\theta\to 0$ のとき、$\dfrac{dS}{d\theta}=\dfrac{1}{2}\left(x\dfrac{dy}{d\theta}-\dfrac{dx}{d\theta}y\right)$

ゆえに、$S=\displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{d\theta}-\frac{dx}{d\theta}y\right)d\theta$ ■

右の図の例で、この定理を使うと、くりぬくので、次のようになる。



原点が外部にある場合

$P_1(x(\alpha))\to P_2(x(\gamma))\to P_1(x(\beta))$ のとき、

$$S=\int_\alpha^\gamma \frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{d\theta}-\frac{dx}{d\theta}y\right)d\theta$$
$$-\int_\gamma^\beta -\frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{d\theta}-\frac{dx}{d\theta}y\right)d\theta$$
$$=\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{d\theta}-\frac{dx}{d\theta}y\right)d\theta$$

D3-3.2　$S=\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}r^2 d\theta$ との違い

媒介変数表示された曲線上の点Ｐについて、$\angle POx=\theta$ でない場合は、$S=\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}r^2 d\theta$ は使えない。この場合には、普通に$\int_p^q ydx$ や$\int_a^b xdy$ を置換積分して求めるか、ガウス・グリーンの定理を用いて求めるかである。

具体例で見てみよう。

【例題】変数θは、$0\leqq\theta\leqq\frac{1}{2}\pi$ とする。点Ｐ$(\cos\theta,\sin\theta)$ における単位円の接線をℓとし、Ｐとの距離がθであるℓ上の２点のうち、原点ＯとＰを通る直線に関して点 A(1,0)と同じ側にある点をＱ(x,y)とする。θが上の範囲を動くときＱの描く曲線と x 軸，y 軸，および直線 y=1 とで囲まれる図形の面積をＳとする。

解答）点 Q(x,y)を求める：OQ=θであるから、

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}+\theta\begin{pmatrix}\cos(\theta-\frac{\pi}{2})\\ \sin(\theta-\frac{\pi}{2})\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x=\cos\theta+\theta\sin\theta\\ y=\sin\theta-\theta\cos\theta\end{cases}$$

$\dfrac{dx}{d\theta}=\theta\cos\theta$，$\dfrac{dy}{d\theta}=\theta\sin\theta$ より、

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{d\theta}-y\frac{dx}{d\theta}\right)d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}((\cos\theta+\theta\sin\theta)\theta\sin\theta-(\sin\theta-\theta\cos\theta)\theta\cos\theta)d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\theta^2 d\theta=\left[\frac{\theta^3}{6}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^3}{48}\qquad\text{(答)}$$

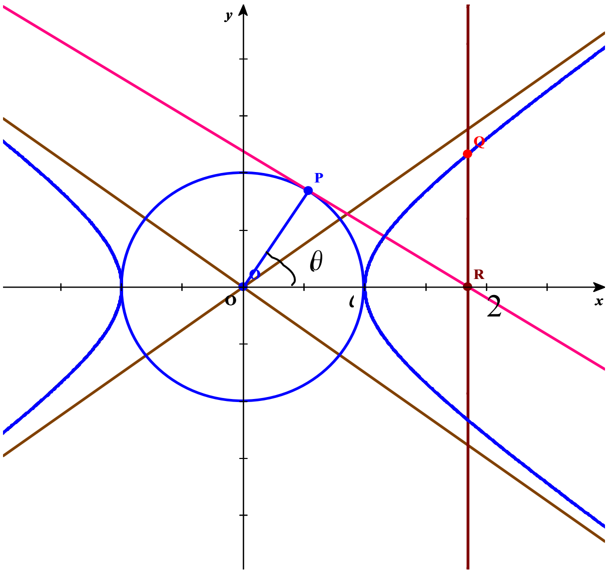
もちろん、$\int_0^1 x\,dy$ からでも計算できるが、計算量が多い。

⑵　公式$S=\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}r^2 d\theta$ を使えない場合の例

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を媒介変数表示すると、

$\tan^2\theta+1=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ から、曲線上の点Q(x,y)は

$\begin{cases} x=\dfrac{a}{\cos\theta} \\ y=b\tan\theta \end{cases}$ と表せる。$\angle QOx\neq\theta$ であるから、



$S=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}r^2d\theta$ は使用できない。漸近線 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 、
$\angle POx=\theta$ のとき、P での接線は、
$x\cos\theta+y\sin\theta=a$ と x 軸との交点が R である。
よって、双曲線上の点 Q は、$\angle QOx\neq\theta$ である。

$\boxed{\text{問題}}$ ①の $a\leqq x\leqq 2a$ の部分と x 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ。

$S=\int_a^{2a}ydx$ では、計算が大変である。

$\boxed{\text{解法1}}$ $S=\int_a^{2a}ydx$ $\begin{cases} x=\dfrac{a}{\cos\theta} \\ y=b\tan\theta \end{cases}$ より、

$x:a\to 2a$ のとき、$\theta:0\to\frac{\pi}{3}$

$$dx=\left(-\frac{a}{\cos^2\theta}\right)(-\sin\theta)d\theta$$

よって、$S=\int_a^{2a}ydx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}b\tan\theta\cdot\frac{a\sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{ab\sin^2\theta}{\cos^3\theta}d\theta=ab\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^3\theta}d\theta$$

$$=ab\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^3\theta}d\theta-ab\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos\theta}d\theta$$

ここで、2つの積分について

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\theta}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\Big[-\log(1-\sin\theta)+\log(1+\sin\theta)\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\log\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}\log\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})^2=\log(2+\sqrt{3})$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^3\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\theta}{\cos^4\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\theta}{(1-\sin^2\theta)^2}d\theta$$

ここで、 $\sin\theta=t$ とおくと、 $\cos\theta d\theta=dt$

$\theta:0\to\frac{\pi}{3}$ のとき、 $t:0\to\frac{\sqrt{3}}{2}$ であるから、

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\theta}{(1-\sin^2\theta)^2}d\theta=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{(1-t^2)^2}dt$$

被積分関数

$$\frac{1}{(1-t^2)^2}=\left(\frac{1}{(1-t)(1+t)}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{2}{(1-t)(1+t)}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)$$

ゆえに、

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^3\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{1-t}-\frac{1}{1+t}-\log|1-t|+\log|1+t|\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{2t}{1-t^2}+\log\frac{1+t}{1-t}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{3}+\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})$$

よって、求める面積は、

$$S=ab\sqrt{3}+\frac{ab}{2}\log(2+\sqrt{3})-ab\log(2+\sqrt{3})$$

$$=\left\{\sqrt{3}-\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})\right\}ab$$ （答）

解法２＜ガウス・グリーンの定理より、線分 OQ と x 軸と曲線とで囲まれた図形の面積を求め、三角形 ORQ から引くと、面積Ｓが求まる＞

$$ab\sqrt{3}-S=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}\left\{x\frac{dy}{d\theta}-y\frac{dx}{d\theta}\right\}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}\left\{\frac{a}{\cos\theta}\cdot\frac{b}{\cos^2\theta}-b\tan\theta\cdot\frac{a\sin\theta}{\cos^2\theta}\right\}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{ab}{2}\cdot\frac{1-\sin^2\theta}{\cos^3\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{ab}{2}\cdot\frac{\cos^2\theta}{\cos^3\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{ab}{2}\cdot\frac{1}{\cos\theta}d\theta=\frac{ab}{2}\log(2+\sqrt{3})$$

よって、$S=ab\sqrt{3}-\dfrac{ab}{2}\log(2+\sqrt{3})$　（答）

ガウス･グリーンの定理のすごさを示す例でもある。以上は、数学Ⅲの授業（2008）で実践した事柄である。
また、媒介変数表示のグラフの‘増減法を用いない’描き方については、参考文献参照のこと。

D3-3.3　２次関数に適用する

問題　$\begin{cases} y=x^2 \\ y=x+2 \end{cases}$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

解　交点 A(-1,1), B(2,4)、曲線 $y=x^2$ 上の点 P(x,y)

を媒介変数表示すると、Ｐ：$\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \end{cases}$

囲まれた図形は、定点Ａと動点Ｐを結ぶ線分が掃く図形と考えられる。＜新しいアイデア＞

$\overrightarrow{AP}=(t+1,t^2-1)$,　$\vec{v}_P=(1,2t)$

ガウス・グリーンの定理によって、

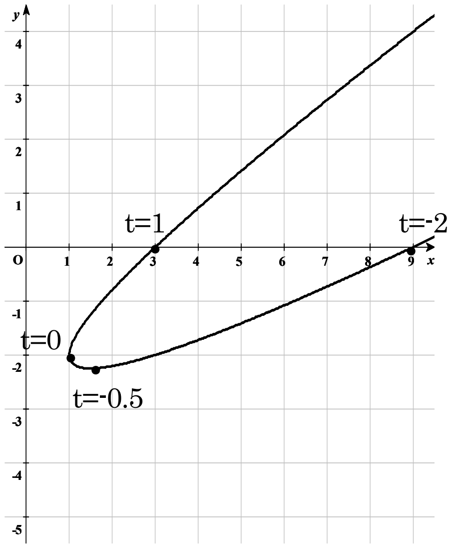
$$S=\int_{-1}^{2}\frac{1}{2}\left\{(t+1)2t-(t^2-1)\cdot 1\right\}dt=\int_{-1}^{2}\frac{1}{2}(t+1)^2\,dt=\frac{9}{2}$$

陽関数を媒介変数表示にできれば面積は求められる。例えば、２曲線上の２動点を結ぶ線分が掃く図形の面積など応用場面は多い。

問題　曲線Ｃ $\begin{cases} x=2t^2+1 \\ y=t^2+t-2 \end{cases}$ とｘ軸とで囲まれた部分の面積を求めよ。

考え方）　まず、曲線Ｃがどんなグラフになるか。D3-2 を参考にして描く。つまり、

$x=2t^2+1$ や $y=t^2+t-2$ をそれぞれ xt 座標平面 ty 座標平面にグラフで描く。それらを合成したグラフが求める曲線Ｃである。



通常の解法）$\displaystyle\int_1^9(-y)dx-\int_1^3(-y)dx$

$$=\int_0^{-2}(-y)\frac{dx}{dt}dt-\int_0^{1}(-y)\frac{dx}{dt}dt$$

$$=\int_0^{-2}(-y)\frac{dx}{dt}dt+\int_1^{0}(-y)\frac{dx}{dt}dt$$

$$=\int_1^{-2}(-y)\frac{dx}{dt}dt=\int_{-2}^{1}y\frac{dx}{dt}dt$$

$$=\int_{-2}^{1}(t^2+t-2)\cdot 4t\,dt=9\ \text{（答）}$$

別解）
求める図形の曲線上の点をＰ、点(3,0)を A とする。

$\overrightarrow{AP}=(2t^2-2,t^2+t-2)$,　Ｐでの速度ベクトル

$\vec{v}_P=(4t,2t+1)$　,　$dS=\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 2t^2-2 & 4t \\ t^2+t-2 & 2t+1 \end{vmatrix}dt$

$$=\frac{1}{2}\left((2t^2-2)(2t+1)-4t(t^2+t-2)\right)dt$$

$$S=\int_1^{-2}-(t-1)^2\,dt=\left[-\frac{1}{3}(t-1)^3\right]_1^{-2}=9$$

D3-3.4　置換積分と等積変形

上記問題を別の角度から考えてみる。

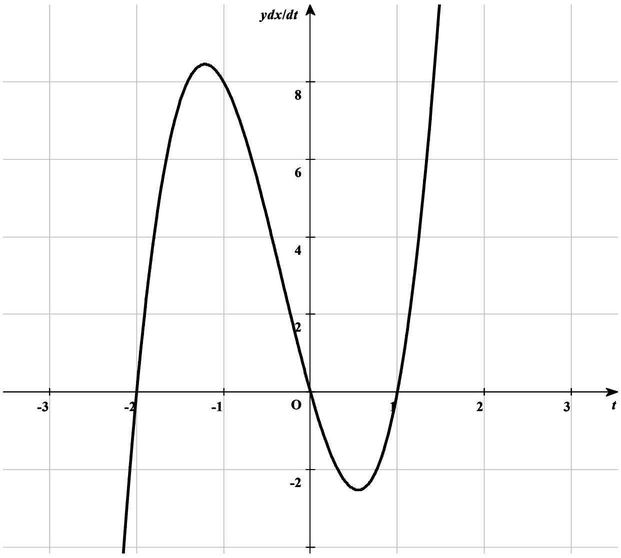
最後の式 $\displaystyle\int_{-2}^{1}(t^2+t-2)\cdot 4t\,dt$ で面積が求まった。

軸が傾いた放物線とｘ軸とで囲まれた部分の面積を等積変形の立場で考えるために、

$$\int_1^9 (-y)dx - \int_1^3 (-y)dx = \int_{-2}^1 y\frac{dx}{dt}dt \quad ・・・①$$

$$\int_{-2}^1 (t^2 + t - 2)\cdot 4t\,dt \quad ・・・②$$

グラフで考えてみる。
②のグラフは、次の３次関数である。



これを、t=-2 から t=1 まで定積分すると、
t=-2（x=9）から t=0（x=1）までが符号付き面積プラスとなり、t=0（x=1）から t=1（x=3）までが符号付き面積マイナスとなる。
問題に与えられた図形は、上記図に符号付き面積に等積変形できたことがわかる。

ちなみに、縦軸は $y\dfrac{dx}{dt}$ であり、横軸は t である。こ
このように、軸を新たに設定するところが数学の創造的な良さであると考える。

D3-3.4　行列式と等積変形

$\boxed{\text{問題}}$　$y = ax^2$（$a \neq 0$）・・・①とｘ軸と $0 \leqq x \leqq 1$ で囲まれた図形の面積を求める問題を置換積分で考えてみるとどうなるか。

考え方）関数①を媒介変数表示すると、'無限' に表現式ができる。それは、

① は、$\begin{cases} x = kt & (k \neq 0) \\ y = ak^2t^2 \end{cases}$ ・・・②と変形できる。

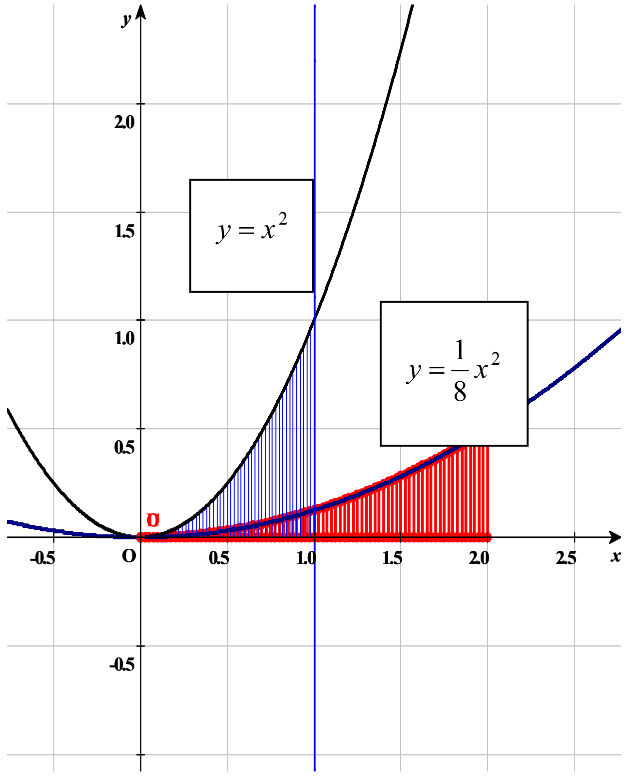
面積Ｓ＝$\displaystyle\int_0^1 ax^2dx$　これを②で置換積分すると、

ｘ：0→１のとき、ｔ：0→$\dfrac{1}{k}$ であるから、

$$S = \int_0^1 ax^2dx = \int_0^{\frac{1}{k}} a(kt)^2\cdot k\,dt = \int_0^{\frac{1}{k}} ak^3t^2\,dt$$

$= \dfrac{a}{3}$　と求められる。

これを $a = 1$，$k = \dfrac{1}{2}$ の場合にグラフで確認してみると、①は $y = x^2$ で、②は $y = \dfrac{1}{8}x^2$ となるから、下図のようになる。



$[0,1]$ の部分と $[0,2]$ の部分に等積変形されたことが次の計算でも確認できる。

１次変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ によって、①が②に変形される。拡大倍率は、$\begin{vmatrix} \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} = 1$

参考文献
駒野誠（2008）数学教育学会秋季論文発表会　臨時増刊「関数の新たな視点－外部変化と内部変化」
（2008　駒野誠）

３．検証

昨年度からの新 SSH 研究開発では、平成 14 年度に指定を受けた SSH 事業「先駆的な科学者・技術者を育成するための中高一貫カリキュラム研究と教材開発」で取り組んできた「統計」と「微分方程式」の教材開発ならびに開発した教材の実践をベースに、「統計」と「微分方程式」以外の内容についての教材開発，カリキュラムへの位置づけも行っている。

開発した教材については、本校の教育研究会や数学科教員研修会等で公開し、広くご意見を伺っている。これらを踏まえて今後さらに新たな教材を開発すると共に、実践を積み上げ、よりよいカリキュラムを目指して研究を続けていきたいと考えている。

（数学科共同執筆、取纏文責　鈴木清夫）